ANTWOORDENMODEL SPELTHEORIE

In totaal zijn er voor dit onderdeel 100 punten te behalen. Per onderdeel wordt in kleur aangegeven hoeveel punten je er voor kunt krijgen: 1 punt, 2 punten of 3 punten.

1. Bij het lezen van voorbeeld 1 moet je inzien dat het een groot risico met zich meebrengt om te zwijgen omdat er dan een kans is om 20 jaar de cel in te moeten. Bij het beantwoorden van de vragen gaat het erom dat je de tabel goed kan opstellen, hem goed kan lezen en bij het bepalen van een strategie rekening houdt met de keuze van de tegenspeler.

a

	Verdachte 2 verlinkt	Verdachte 2 zwijgt
Verdachte 1 verlinkt	Verdachte 1: 10 jaar cel Verdachte 2: **10 jaar cel**	Verdachte 1: vrijuit Verdachte 2: **20 jaar cel**
Verdachte 1 zwijgt	Verdachte 1: **20 jaar cel** Verdachte 2: **vrijuit**	Verdachte 1: **1 jaar cel** Verdachte 2: **1 jaar cel**

Als ze kunnen overleggen, zouden ze afspreken beide te zwijgen. Het blijft echter een groot risico om de ander te vertrouwen. Waarschijnlijk maakt het niets uit, tenzij de afspraak afdwingbaar is.

b
- Als de situatie zo wijzigt dat je 15 jaar de cel in gaat als beide verlinken dan is het verstandig om de strategie te kiezen de ander te verlinken omdat als de ander verlinkt kun je het beste ook verlinken (10 jaar cel is beter dan 20 jaar cel). En als de ander zwijgt dan kun je ook beter verlinken (vrijuit is beter dan 1 jaar de cel in).
- Als de situatie zo wijzigt dat je 20 jaar de cel in gaat als beide verlinken dan is de keuze moeilijker. Als de ander jou verlinkt dan maakt het voor jou niet uit of je verlinkt of zwijgt. Maar als de ander zwijgt dan is het beter om te verlinken. Aangezien je maar één keer kunt kiezen is de beste strategie de ander te verlinken.
- Als de situatie zo wijzigt dat je 25 jaar de cel in gaat als beide verlinken, dan zullen ze beide zwijgen. Er is geen dominante strategie, maar wanneer ze de maximin-strategie spelen en hun risico's minimaliseren, zullen ze beide zwijgen.

c
- Als de situatie zo wijzigt dat je vrijuit gaat als beide zwijgen dan is het verstandig om te verlinken. Want als de ander jou verlinkt kun jij het beste ook verlinken (10 jaar is beter dan 20 jaar cel). Als de ander zwijgt, maakt het voor jou niet uit of je zwijgt of verlinkt (beide gevallen vrijuit). Aangezien je maar één keer kunt kiezen is de beste strategie de ander te verlinken.
- Als de situatie zo wijzigt dat je 10 jaar de cel in gaat als beide zwijgen dan is het verstandig te verlinken. Want als de ander verlinkt dan is het beter om ook te verlinken (10 jaar cel is beter dan 20 jaar cel). Als de ander zwijgt is het beter om te verlinken (vrijuit is beter dan 10 jaar cel).

2.

a situatie 1

X	O	X
O		X

In situatie 1 zet je het kruisje rechtsonder omdat je dan zelf twee mogelijkheden creëert en de ander verplicht zijn rondje in het midden te zetten. Situatie 2 is een zelfde soort situatie,, maar dan in spiegelbeeld.

b Je zet je kruisje nooit in het begin in het midden omdat je bij iedere volgende beurt je de tegenstander verplicht drie-op-een-rij te blokkeren door een rondje aan de overzijde te zetten van jou kruisje. Je creëert zo nooit twee mogelijkheden en je zal zo nooit winnen. (Maar als je goed speelt, wint de ander ook niet)

c In het midden, je kunt er dan voor zorgen dat er altijd maar één mogelijkheid is voor kruisje en deze mogelijkheid kun je blokkeren.

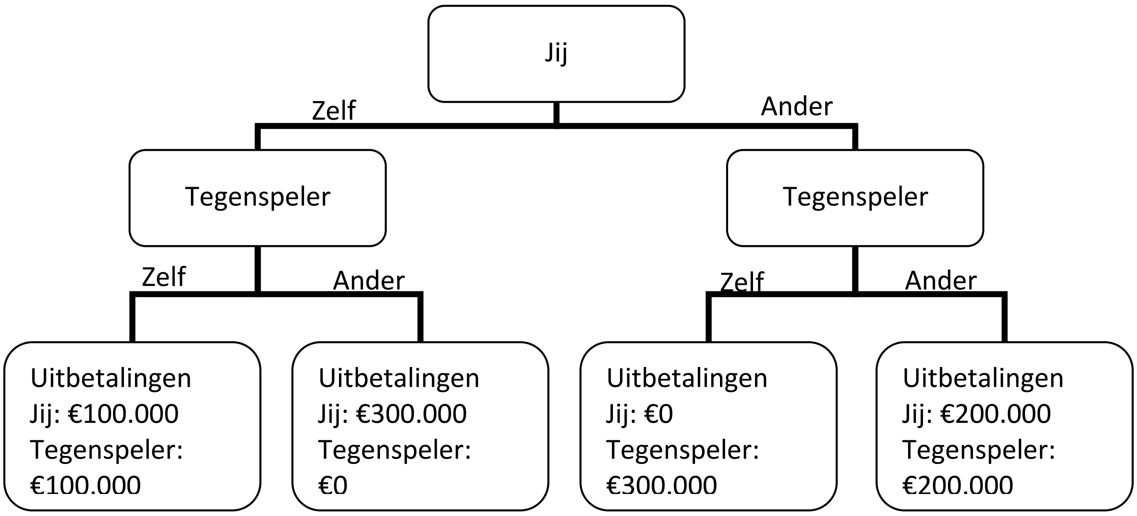
3. Je kiest een plek die voor jullie allebei een bekende plek is. Je redeneert als volgt: Als ik mijn vriend(in) zou zijn, waar zou ik dan heen gaan? En je bedenkt dat de ander ook bedenkt waar jij heen zou gaan. Als je beide bijvoorbeeld met de trein gaat kies je logischerwijs voor het Centraal Station. Ben je in het centrum dan kies je voor de Dam. (mag ook een ander plek zijn natuurlijk). In deze opgave gaat het erom dat je rekening houdt met de andere speler, en met wat deze speler van jou weet.

4. a

	De ander kiest voor €200.000 voor jou	De ander kiest voor €100.000 voor zichzelf
Jij kiest voor €200.000 voor de ander	Jij: €200.000 Tegenspeler: €200.000	Jij: €0 Tegenspeler: €300.000
Jij kiest voor €100.000 voor jezelf	Jij: €300.000 Tegenspeler: €0	Jij: €100.000 Tegenspeler: €100.000

b. Als de ander kiest voor €200.000 voor jou dan kies jij voor jezelf (€300.000>€200.000). Als de ander kiest voor €100.000 voor zichzelf, dan kies jij ook voor jezelf (€100.000>€0). De ander denkt ook zo en je kiest dus voor €100.000 voor jezelf.

c.



5.a.

	De anderen blijven vechten	De anderen vluchten
Jij blijft vechten	Jij: 3 Anderen: 3	Jij: 0 Anderen: 2
Jij vlucht	Jij: 2 Anderen: 3	Jij: 2 Anderen: 2

De tabel mag aangepast worden. Een toelichting op de invulling van de tabel is noodzakelijk. In dit voorbeeld krijgen beide 3 punten als ze beide blijven vechten. Als jij vlucht, krijg je 2 punten. Eén punt minder omdat je niet de eer van ‘vechten voor je land’ hebt. Voor de

anderen maakt het niet uit of jij wel of niet mee doet. Als de anderen vluchten en jij blijft vechten, overleef je het waarschijnlijk niet. De anderen zijn in elk geval hun leven zeker en krijgen daarvoor 2 punten. Als iedereen vlucht, krijgt iedereen 2 punten.
Je zou ook kunnen beargumenteren dat, wanneer anderen vechten, jij meer punten hebt als je vlucht, omdat het land dan wint en jij nergens last van hebt.

b. De antwoorden zijn afhankelijk van jouw invulling van de tabel. In dit voorbeeld heb je geen dominante strategie en zou je misschien op zeker spelen en vluchten. Als je uitbetaling voor vluchten, vechten 3 is, dan heb je wel een dominante strategie en zal je vluchten.

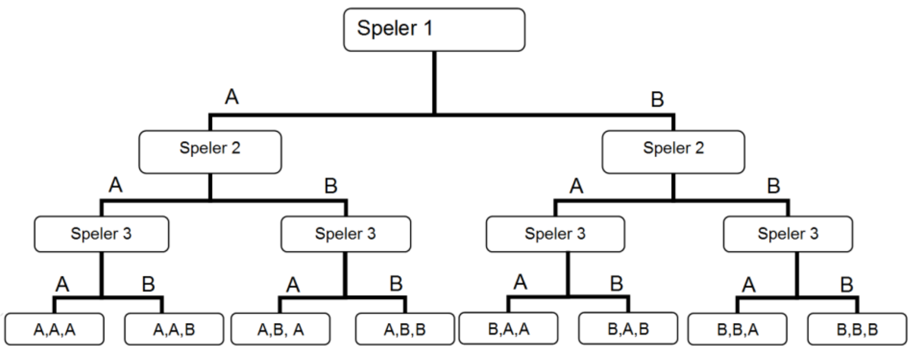
c. De anderen hebben een dominante strategie om te blijven vechten. Op basis hiervan kan je bij b redeneren dat jij dan ook blijft vechten.

d. De tevredenheid is van veel variabelen afhankelijk. Eergevoel en vriendschap speelt ook een rol en dat is moeilijk in waardes uit te leggen.

6 Voor speler 2 zijn de uitbetalingen als volgt:
speler 1, speler 2
(zwijgen, zwijgen) =1
(zwijgen, verlinken) =0
(verlinken, zwijgen) =20
verlinken, verlinken) =10

7a. Twee spelers, drie strategiemogelijkheden: $3^2 = 9$ uitkomstmogelijkheden

b. Nee. Als er drie spelers zijn die elk 2 strategiemogelijkheden hebben, zijn er $2^3 = 8$ strategiemogelijkheden. Dat ziet er als volgt uit in een spelboom:



c. 4^3=64 mogelijkheden

d. Voor *i* aantal spelers met elk n keuzemogelijkheden, geldt de volgende formule met A voor het aantal uitkomstmogelijkheden: $A=n^i$

e. Aantal strategiemogelijkheden van speler 1 * aantal strategiemogelijkheden van speler 2 * aantal strategiemogelijkheden van speler 3, etc. In formulevorm kun je dat zo aangeven:
A = n1 * n2 * n3 ....
Met A = aantal uitkomstmogelijkheden, n = aantal strategiemogelijkheden en de cijfers staan voor de spelers (speler 1 = 1, speler 2 = 2).

8a. 1. Spelers: n = 20 (bijvoorbeeld)
2. Regels: - alle leerlingen maken keuze uit getallen 0-100
- alle keuzes worden tegelijk (simultaan) gemaakt
3. Strategiemogelijkheden: 101, namelijk 0 tot 100
4. Uitkomsten: er zijn 20 leerlingen en elke leerling heeft 101 strategiemogelijkheden, er zijn in totaal dus $101^{20} = 1{,}2 \times 10^{40}$ uitkomstmogelijkheden

5. - u_i = 0 bonus als verliezer
- u_i = 1 bonus als winnaar

b. De vraag is niet heel goed gesteld. Er wordt gevraagd naar het berekenen van het gemiddelde dat vermenigvuldigd wordt met 2/3. Dat zou zijn:
Gemiddelde = (Alle cijfers bij elkaar opgeteld / aantal leerlingen).
Interessanter is het om te kijken of je een berekening kan geven voor het winnende getal. Het gemiddelde van 0 t/m 100 is 50. Als je dat zou vermenigvuldigen met 2/3 komt er 66,67 uit. Maar als iedereen dat weet, vult iedereen dat in en wordt dat het gemiddelde. Vermenigvuldigd met 2/3 is 33,33. Als iedereen dat kan beredeneren, wordt het gemiddelde 33,33, enzovoort.
In formulevorm: $50 * 2/3^{\infty}$ (gemiddelde $* 2/3^{\infty}$).

c. Een rationele speler houdt ten eerste rekening met de bovenstaande beredenering, maar daarnaast houdt hij/zij ook rekening met het feit dat misschien niet iedereen dat kan beredeneren.

d. Volgt uit de antwoorden bij b en c.

9 Spelers= Ik en mijn tegenspeler.
Regels = - Beide spelers moeten een keuze maken tussen het geld aan je tegenspeler geven (€200.000) of voor jezelf houden (€100.000).
- De spelers moeten op hetzelfde moment de keuze maken.
Uitkomsten= Jij kiest voor jezelf – Jouw tegenstander kiest ook voor jou.
Jij kiest voor jezelf – Jouw tegenstander kiest voor zichzelf.
Jij kiest voor je tegenstander - Jouw tegenstander kiest voor jou.
Jij kiest voor je tegenstander – Jouw tegenstander kiest voor zichzelf.
Uitbetalingen=

(zelf, zelf)	= €100.000,	€100.000
(zelf, ander)	= €300.000,	€0
(ander, zelf)	= €0,	€300.000
(ander, ander)	= €200.000,	€200.000

10. Wanneer er drie ijsverkopers op het strand zitten is er geen evenwicht wanneer ze alle drie in het midden gaan zitten omdat ze de neiging hebben om naar een kant toe te bewegen om zo hun marktaandeel te vergroten.
Maar is er een ander evenwicht te vinden? Allereerst moet worden ingezien dat áls er een ander evenwicht is, dat in dit evenwicht een eerlijke verdeling moet plaatsvinden, oftewel: allemaal 1/3 van het strand. Dit kan nu alleen als ze alledrie in hetzelfde punt gaan zitten (maar dan belanden we in de situatie zoals die hierboven beschreven is) of als ze of respectievelijk 1/6, ½, 5/6 van het strand gaan zitten. Maar ook hier hebben de spelers de neiging om van hun plaats af te wijken en richting een andere ijsverkoper te verplaatsen om hun marktaandeel te vergroten.
Conclusie: er is geen evenwicht.

11a 1. er zijn twee spelers, namelijk bierbrouwerij I en bierbrouwerij II
2. - spelers mogen niet overleggen
- spelers moeten op hetzelfde moment hun keuze maken
3. De strategiemogelijkheden zijn voor beide spelers hetzelfde. Nml.:
- strategie 1 (=s_1) = Wel nieuwe biersoort brouwen
- strategie 2 (=s_2) = Niet nieuwe biersoort brouwen
4. De uitkomsten zijn: (W,W), (W,N), (N,W), (N,N)
5. De uitbetalingen voor (speler 1,speler 2) zijn:

- (W,W) = 8,4
- (W,N) = -1,5
- (N,W) = 3,8
- (N,N) = 2,10

b (i) als Brouwerij II voor W kiest, dan kiest Brouwerij I voor N (2>-1)
(ii) als Brouwerij II voor N kiest, dan kiest Brouwerij I voor W (8>3)
Er is voor Brouwerij I dus géén dominante strategie omdat hij afhankelijk is van de keuze van de ander.

c Voor een dominante strategie moet gelden voor Brouwerij dat hij onafhankelijk van Brouwerij II kiest voor W, of kiest voor N:
(i) om de dominante strategie W te krijgen moet gelden:
2 > -1 (dat klopt al)
8 < 3 (dat klopt niet) - dus moet de 8 veranderen in x met $x < 3$
- of moet de 3 veranderen in y met $y > 8$
(ii) om de dominante strategie N te krijgen moet gelden:
2 < -1 (dat klopt niet) - dus moet de 2 veranderen in p met $p < -1$
- of moet de -1 veranderen in q met $q > 2$
Er zijn dus oneindig veel mogelijkheden.

12a Volgens de maximin-strategie is Bedrijf I nu indifferent (-10 = -10). Aangezien de minimale winst voor beide keuzes gelijk is, kijk je nu waar de maximale winst het hoogst is. En die is het hoogst bij wel investeren.

Strategiekeuze	*Bedrijf 2: N*	*Bedrijf 2: W*
Bedrijf 1: N	(0,0)	(-10,10)
Bedrijf 1: W	(-10,0)	(20,10)

b Als het 0 wordt, zal bedrijf I gaan investeren. Er is nu een dominante strategie.
c Nee. Bedrijf II heeft een dominante strategie om te investeren. De uitbetalingen van speler I hebben hier geen invloed op.
d De laagste winst van bedrijf II bij niet investeren is 0, en bij wel investeren 10. Bedrijf II kiest voor investeren. De dominante strategie gelijk aan de maximin-strategie.

13 Wanneer je je risico's wilt minimaliseren gebruik je de maximin-strategie. Door de beste van twee worst-case-scenario's te kiezen, wordt de meest lage uitbetaling uitgesloten.

14a spel 2: speler I kiest A want 4 > 2 en 3 > 2
spel 3: speler I kiest A want 4 > 2 en 3 > 2
b spel 1: speler II kiest A want 5 > 3 en 6 > 4
spel 2: speler II kiest A want 4 > 3 en 6 > 4
c

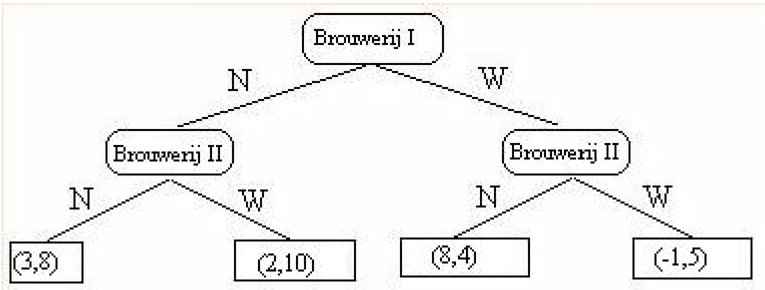
	Speler 1	
1	**A**	3
	B	2
2	**A**	3
	B	2
3	**A**	3
	B	2
4	A	1
	B	2

	Speler 2	
1	**A**	5
	B	3
2	**A**	5
	B	3
3	A	0
	B	3
4	A	0
	B	2

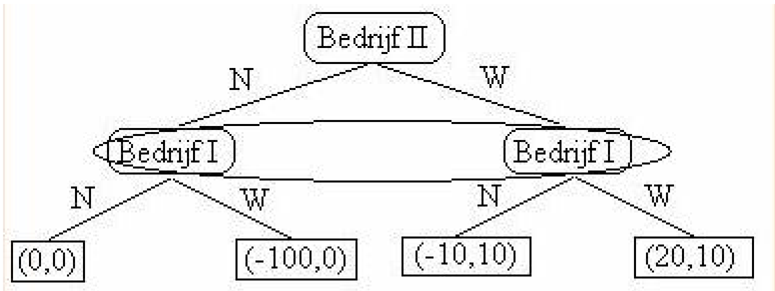
Voor de uitbetaling moet je ook kijken naar de tegenspeler. Voor speler 1: bij spel 2 is de hoogste uitbetaling, namelijk 4. (Speler 2 heeft een dominante strategie voor A)
Voor speler 2 is de laagste uitbetaling te vinden in spel 4, namelijk 0.

15 Ja, een dominante strategie is altijd een maximin-strategie. De dominante strategie geeft aan welke strategie je het best kan spelen, ongeacht de strategie van je tegenspeler. Bij de maximin neem je de beste van twee slechte opties (ook ongeacht de keuze van je tegenspeler). Een dominante strategie bekijkt ook de beste van twee opties.

16



17



Dit boomdiagram wijkt af van voorbeeld 11 doordat hier de keuzes tegelijk worden genomen en dus zitten de keuzes van bedrijf I in één informatieverzameling. In de figuur wordt dit kenbaar gemaakt door een ovaal te tekenen om de beslispunten van bedrijf I.

18 Uitleg bij deze opgave is noodzakelijk! Voor elk van de uitspraken is namelijk wel iets te zeggen. De meeste simultane spelen zijn imperfect. Er is geen informatie over de strategie van de tegenspeler. Behalve wanneer er maar één keuzemogelijkheid is. De vraag is dan alleen of er wel sprake is van een spel.
Een dynamisch spel is meestal perfect, omdat je kunt zien welke strategie je tegenspeler heeft gespeeld. Je zou kunnen beargumenteren dat geen enkel spel imperfect is, omdat er dynamische spelen te bedenken zijn die niet volledig perfect zijn. Bijvoorbeeld wanneer je tegenspeler voorkennis heeft en een bewuste strategie kiest met het oog op de toekomt. Wanneer jij die voorkennis niet hebt, is het spel gedeeltelijk imperfect.

19 Het is imperfect; en gedeeltelijk perfect, omdat een gedeelte van het spel simultaan plaatsvindt. Het is dus ook gedeeltelijk simultaan.

20a

		Hubba Bubba (HB)	
		Vechten	Aanpassen
Big Gum (BG)	In	(-3,-1)	(2,1)
	Uit	(0,2)	(0,2)

b Big Gum: geen dominante strategie: - als HB vecht kiest BG voor Uit
- als HB zich aanpast kiest BG voor In

Hubba Bubba: dominante strategie: - als BG in de markt komt kiest HB voor aanpassen
- als BG uit de markt blijft kiest HB voor aanpassen

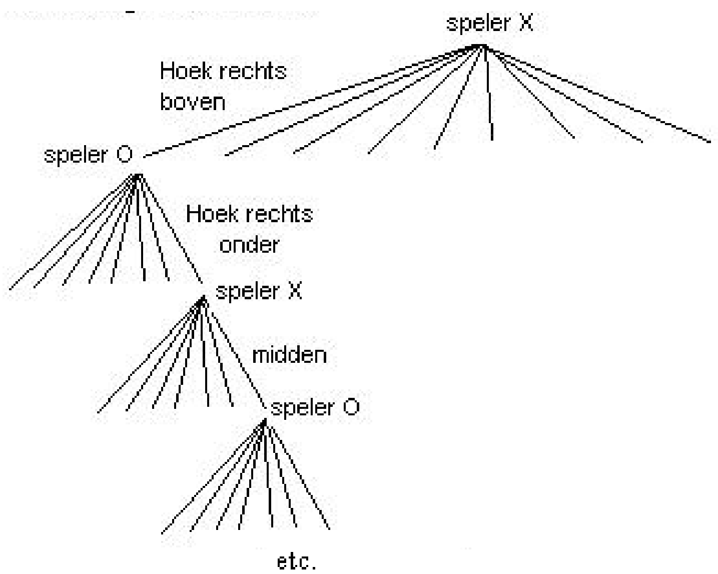
c In de normale vorm is niet duidelijk dat er sprake is van een simultaan spel, in de extensieve vorm wel.

d De verwachte waarde voor de uitbetalingen voor Vechten:
(-1*70) + (2*30) /100 = -0,1
De verwachte waarde voor de uitbetalingen voor Aanpassen:
(1*70) + (2*30) /100 = 1,3

e Nee, want Hubba Bubba heeft een dominante strategie om aan te passen.

21 Er zijn diverse varianten te bedenken. Belangrijk is dat de keuzes/strategieën duidelijk af te lezen zijn uit de schets, dat er nagedacht is over of het een dynamisch of simultaan spel is en dat er een idee gegeven wordt van de uitkomsten.

22a. Er wordt gevraagd om een schets. In eerste instantie is het veld van 3 x 3 helemaal leeg en heeft spelerX negen keuzes. Als spelerO dan vervolgens aan de beurt is heeft hij nog maar 8 mogelijkheden, spelerX daarna nog 7,…



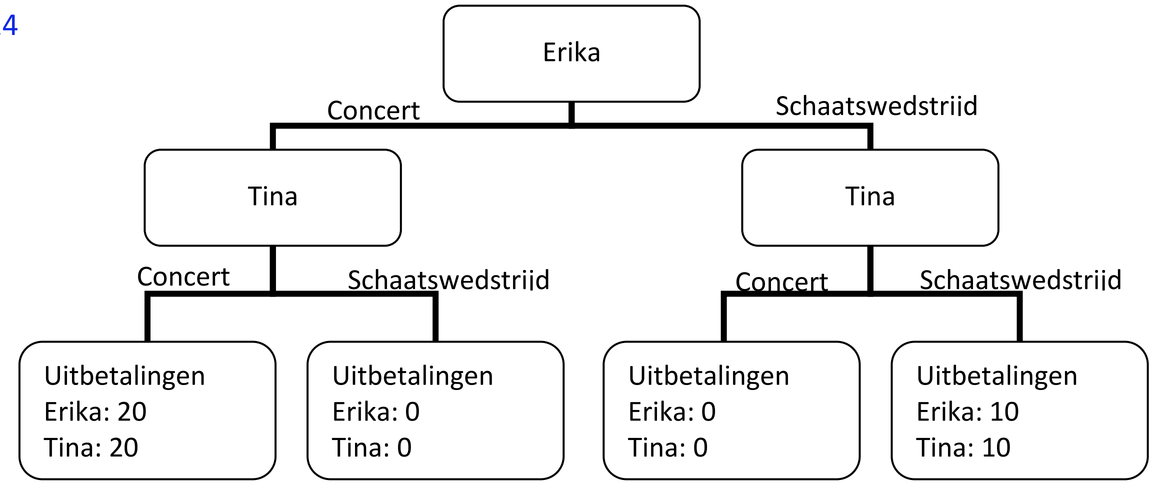
Als deze staart af is gemaakt is de schets klaar omdat de andere paden op soortgelijke wijze tot stand komen.

b Je mag ervan uitgaan dat in elk spel alle vakken gevuld worden. Dit is natuurlijk niet altijd zo, maar vanuit theoretisch oogpunt wordt het wel vaak zo gedaan. Dit levert dan uiteraard 9 x 8 x 7 x … x 1 = 9! = 362880 eindpunten op.

c Als je dit volledig uitschrijft, zou dat heel veel werk zijn en je zou hier een groot papier voor nodig hebben.

23 NA

24



25 gegeven is deze tabel , die eerder gemaakt is in opgave 1:

	Verdachte 2 verlinkt	Verdachte 2 zwijgt
Verdachte 1 verlinkt	Verdachte 1: 10 jaar cel Verdachte 2: 10 jaar cel	Verdachte 1: vrijuit Verdachte 2: 20 jaar cel
Verdachte 1 zwijgt	Verdachte 1: 20 jaar cel Verdachte 2: vrijuit	Verdachte 1: 1 jaar cel Verdachte 2: 1 jaar cel

- Als verdachte 2 kiest voor verlinken, dan kiest verdachte 1 voor verlinken (onderstreept in de tabel).
- Als verdachte 1 kiest voor verlinken, dan kiest verdachte 2 voor verlinken(onderstreept in de tabel)

Er is nu een Nash-evenwicht gevonden: verlinken, verlinken: want verdachte 1 kiest nu het beste wat hij kan gegeven wat zijn tegenspeler doet, namelijk gegeven dat verdachte 2 voor verlinken kiest, kiest verdachte 1 voor verlinken én verdachte 2 kiest nu het beste wat hij kan gegeven wat zijn tegenspeler doet, namelijk gegeven dat verdachte 1 voor verlinken kiest, kiest verdachte 2 ook voor verlinken. Is er nog een Nash evenwicht?
- Als verdachte 2 kiest voor zwijgen, dan kiest verdachte 1 voor verlinken
- Als verdachte 1 kiest voor verlinken, dan kiest verdacht 2 voor verlinken (dat hadden we al gezien), dus hier geen Nash-evenwicht. Om het verhaal compleet te maken (maar in theorie niet nodig, we weten nu dat er geen Nash-evenwichten meer zijn):
- Als verdachte 1 kiest voor zwijgen, dan kiest verdachte 2 voor verlinken
- Als verdachte 2 kiest voor verlinken, dan kiest verdachte 1 voor verlinken, dus geen Nash-evenwicht.

Ook hadden we kunnen zien dat het spel symmetrisch is en er een dominante strategie is voor beide spelers en we kunnen bewijzen dat (zie opg 29) dat bij een strikt dominante strategie er een uniek Nash-evenwicht is.

26a

		Bedrijf I	
		H	L
Bedrijf II	H	(-20,-30)	(900,600)
	L	(100,800)	(50,50)

- Als Bedrijf I kiest voor H, dan kiest Bedrijf II voor L
- Als Bedrijf II kiest voor L, dan kiest Bedrijf I voor H, gevolg: (L,H) is N-E
- Als Bedrijf I kiest voor L, dan kiest Bedrijf II voor H
- Als Bedrijf II kiest voor H, dan kiest Bedrijf I voor L, gevolg: (H,L) is N-E

b - Bedrijf I kiest voor L (50 > -30)
- Bedrijf II kiest voor L (50> -10)
- Uitkomst L,L : 50,50

c Samen zullen ze voor de hoogste gezamenlijke winst gaan, dit is het geval bij (H,L). Merk op dat Bedrijf II dit niet zomaar doet, want 800>600, hiervoor is opgave d:

d Bedrijf I haalt meer voordeel uit de samenwerking omdat hij zekerheid kan hebben op 900 t.o.v. 100 (verschil 800) en Bedrijf II heeft maar verschil van 200. Om Bedrijf II over te halen om voor strategie H te kiezen moet Bedrijf I meer dan 200 bieden zodat het voor bedrijf II voordeliger is om voor H te kiezen. Bedrijf I doet dit omdat hij dan zekerheid heeft op 900 ipv 100. Dus er is onderhandelingsruimte tussen de 200 en 800 euro. Bij meer dan 800 heeft Bedrijf I geen voordeel meer voor zekerheid op een groot bedrag.

27

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(**10**,**10**)	(3,3)
	B	(-100,5)	(1,1)

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(**20**,**30**)	(18,18)
	B	(15,15)	(30,10)

Dikgedrukte is NE: vanuit deze situatie heeft een enkele speler geen prikkel om van strategie te wijzigen wanneer de tegenspeler deze strategie speelt.

28a

		Bedrijf II		
		A	B	C
Bedrijf I	A	(-10,-10)	(0,10)	(10,20)
	B	(10,0)	(-20,-20)	(-5,15)
	C	(20,10)	(15,-5)	(-30,-30)

- Bedrijf II voor A → Bedrijf I voor C
- Bedrijf I voor C → Bedrijf II voor A, gevolg: (C,A) is NE
- Bedrijf II voor B → Bedrijf I voor C, kan geen NE opleveren
- Bedrijf II voor C → Bedrijf I voor A
- Bedrijf I voor A → Bedrijf II voor C, gevolg: (A,C) is NE

b

		Bedrijf II		
		A	B	C
Bedrijf I	A	(-**10**,-**10**)	(0,10)	(10,20)
	B	(10,0)	(-**20**,-**20**)	(-5,15)
	C	(20,10)	(15,-5)	(-**30**,-**30**)

- Bedrijf I kiest voor A (-10 = kleiner dan -20 of -30)

- Bedrijf 2 kiest voor A (-10 = kleiner dan -20 of -30)
- Uitkomst is A,A

c Als bedrijf II weet dat bedrijf I de maximin-strategie zal spelen, zal hij zelf C gaan spelen, omdat dat voor hem de meeste winst oplevert.

29 Als 2 spelers beide een maximin-strategie spelen, hoeft dat geen Nash-evenwicht te zijn. Een speler kan wellicht nog een betere uitbetaling krijgen door te veranderen van strategie.
Een dominante strategie-evenwicht is echter altijd een Nash-evenwicht. Wanneer er een dominante strategie is, kiezen de spelers deze strategie die in alle gevallen de beste uitkomst biedt. Deze spelers hebben dus geen prikkel om de strategie te wijzigen.