

SPELTHEORIE



Hoe bepaal jij je strategie?

Inhoudsopgave

Voorwoord

p. 3

Inleiding

p. 4

1. Speltheorie

p. 5

Wat is speltheorie?

p. 5

Basiselementen

p. 9

2. Niet-coöperatieve speltheorie

p. 11

Normale vorm

p. 12

Extensieve vorm

p. 16

Nash-evenwicht

p. 20

Begrippenlijst

p. 23

Voorwoord

Dit studiemateriaal is geschreven als onderdeel van een onderzoek naar materiaal dat gebruikt kan worden als keuzeonderwerp voor Wiskunde D.

Om het voor economie, waar het onderwerp Speltheorie ook een verplicht examenonderdeel zal worden, geschikt te maken, zijn de wiskundige notaties, verdere uitwerkingen en de bijbehorende opgaven geschrapt

Het doel van dit studiemateriaal is om kennis te maken met de niet-coöperatieve speltheorie, waarin op zoek wordt gegaan naar evenwichtssituaties in verschillende spelen.

Elke paragraaf zal een stuk theorie met voorbeelden bevatten en wordt afgesloten met bijbehorende vragen.

Aan het einde van het boek is een overzichtsl lijst te vinden met daarin alle gebruikte termen met een beknopte uitleg.

Inleiding

Zelf ben je ongemerkt in aanraking gekomen met speltheorie tijdens het spelen van spellen als schaken, Stratego, Kolonisten van Catan, Machiavelli en pokeren. Maar de speltheorie komen we vooral tegen in de economie waar we kunnen denken aan het veilen van de ether- en UMTS-frequenties, het bepalen van strategieën in de prijsoorlog tussen de supermarkten en het aangaan van een coalitie in de politiek. Daarnaast komen we de speltheorie ook tegen in andere wetenschappen als biologie, politicologie en psychologie. Het geeft wel aan dat we hier te maken hebben met een breed onderwerp dat ieder op zijn eigen interessegebied kan toepassen.

In dit lesmateriaal bestaat uit 2 hoofdstukken. In hoofdstuk 1 zal een duidelijk beeld gegeven worden wat er wordt verstaan onder speltheorie, welke basiselementen nodig zijn om de speltheorie te bestuderen

Het tweede hoofdstuk beslaat de niet-coöperatieve speltheorie. Hierbij mogen spelers niet met elkaar samenwerken en er zal gezocht worden naar evenwichtssituaties in de spelen.

1. Speltheorie

1.1 Wat is speltheorie

spel·the·o·rie (de ~ (v.))

1 theorie van het spelen of van het kansspel

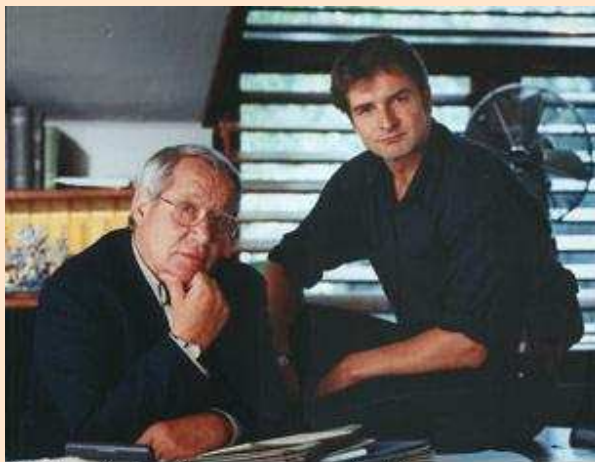
Bron: Van Dale woordenboek

In de bovenstaande figuur staat de definitie van speltheorie beschreven volgens het Van Dale woordenboek. Deze definitie geeft een korte duidelijke beschrijving, maar we realiseren ons dat we de *theorie* moeten beschrijven. Een beter beeld geeft de volgende definitie:

Definitie 1 : *Speltheorie* houdt zich bezig met wiskundige modellen van situaties van conflict en samenwerking uit de reële wereld tussen tenminste twee rationele en intelligente spelers.¹

We merken als eerste op dat het spel dus altijd met meerdere spelers gespeeld wordt. Elke speler bepaalt een strategie om het spel te spelen waarbij hij er rekening mee houdt dat de andere spelers dat ook doen. Over het algemeen leidt een strategie tot een zekere uitbetaling². Het doel van iedere speler is om een strategie te kiezen die zijn uitbetaling maximaliseert. De speltheorie bestudeert het gedrag van de spelers in een gemodelleerd praktijkprobleem, het spel.

Voorbeeld 1 *Baantjers* gevangenendilemma (versie I)



De Cock en Vledder peinen over een moordzaak. Bron: <http://www.rtl.nl/soaps/baantjer/fotogallery.xml>

De Cock en Vledder zijn twee politieagenten en hebben twee verdachten aangehouden. Ze worden beiden verhoord op het politiebureau voor een dubbele moord. De Cock verhoort 'verdachte 1' en Vledder verhoort 'verdachte 2' in een aparte ruimte zodat de verdachten niet met elkaar in contact kunnen komen. De verdachten hebben twee opties: ze kunnen zwijgen of ze kunnen de ander verlinken. Wanneer ze allebei zwijgen krijgen ze een gevangenisstraf van 1 jaar wegens gebrek aan bewijs. Als de ene de ander verlinkt gaat hij vrijuit en

krijgt de ander 20 jaar cel. Tenzij ze allebei elkaar verlinken, want dan gaan ze beiden voor 10 jaar de cel in.

(Vervolg voorbeeld 1)

We kunnen het probleem weergeven in een overzichtstabel:

¹ Bron: Speltheorie, P. van Mouche

² Uitbetaling moet in de breedste zin van het woord worden gezien. Het gaat erom dat een spel een resultaat oplevert.

	Verdachte 2 verlinkt	Verdachte 2 zwijgt
Verdachte 1 verlinkt	Verdachte 1: 10 jaar cel Verdachte 2: 10 jaar cel	Verdachte 1: vrijuit Verdachte 2: 20 jaar cel
Verdachte 1 zwijgt	Verdachte 1: 20 jaar cel Verdachte 2: vrijuit	Verdachte 1: 1 jaar cel Verdachte 2: 1 jaar cel

Over het algemeen zullen beide verdachten voor de strategie kiezen om de ander te verlinken. Als één dat niet doet, loopt hij het risico 20 jaar de cel in te gaan.

Een andere en meer gangbare manier om de “uitbetalingen” in een tabel te zetten is deze:

	Verdachte 2 verlinkt	Verdachte 2 zwijgt
Verdachte 1 verlinkt	(10,10)	(0,20)
Verdachte 1 zwijgt	(20,0)	(1,1)

Merk op dat we hier te maken hebben met straffen en dus niet willen maximaliseren, maar minimaliseren

Opgaven 1.1

- 1 Beschouw de situatie zoals in Voorbeeld 1. De verdachten zullen waarschijnlijk de strategie kiezen om elkaar te verlinken om niet het risico te lopen 20 jaar de cel in te moeten gaan.
 - a Stel dat ze beiden vóór het verhoor de tabel kennen en ze mogen overleggen, zou dat uitmaken voor hun strategiekeuze?
 - b Stel dat als ze elkaar verlinken ze beide niet 10 maar 15 jaar de cel in moeten gaan, zullen ze dan hun oorspronkelijke strategie aanpassen? En als het verandert naar 20 jaar? En 25 jaar?
 - c Stel dat ze ook worden vrijgesproken als ze allebei zwijgen, zullen ze dan hun oorspronkelijke strategie aanpassen? En als ze ook 10 jaar krijgen als ze beide zwijgen?

2 Stel je speelt boter-kaas-en-eieren.

- a Hieronder zie je twee spelsituaties. Stel jij bent 'kruisje' en de tegenstander is 'rondje'. Jij bent in beide situaties aan zet, waar zet jij je kruisje neer?

1.

×	○	×
○		

2.

×	○	×
		○

- b Als jij het spel mag beginnen, waar zet je dan *niet* je kruisje neer? En waarom?
- c Waarom teken je als jij 'rondje' bent in jouw eerste beurt (dus nadat "kruisje" het spel is begonnen) altijd in het middelste vakje?

3 Stel je spreekt met een vriend(in) af om naar Amsterdam te gaan. Jullie reizen niet samen en kunt elkaar niet bereiken, waar ga je naar toe in Amsterdam? En waarom?



De Dam



Amsterdam Centraal Station

4 Er is iemand die graag veel geld weggeeft. Hij legt je de volgende keuze voor: "Je kunt kiezen om van mij €100.000,- te krijgen, zonder er ook maar iets voor te hoeven doen, of je kunt mij € 200.000,- laten schenken aan je tegenspeler. Bedenk

goed wat je doet, want ik leg precies dezelfde keuze voor aan je tegenspeler. Jullie zullen beiden op hetzelfde moment moeten kiezen.”

Je moet dus kiezen voor €100.000,- voor jezelf of €200.000,- voor de ander. Wat moet je doen? Bedenk dat als beide spelers voor de ander kiezen, ieder €200.000,- verdient.

De verschillende mogelijkheden kunnen in een tabel als volgt worden genoteerd:

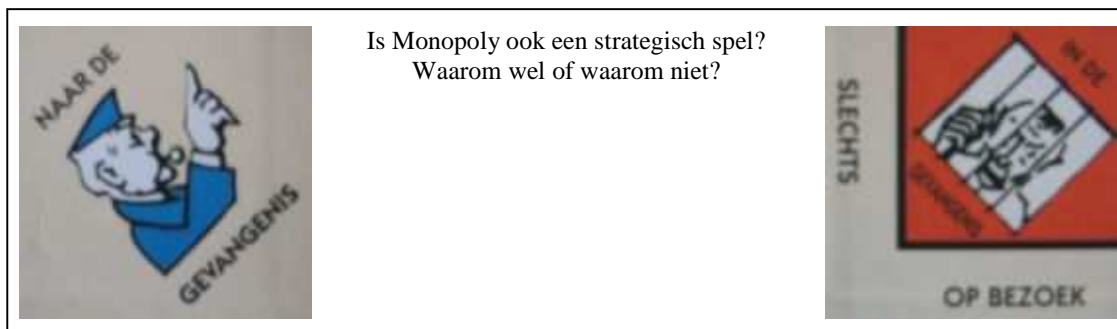
	De ander kiest voor €200.000 voor jou	De ander kiest voor €100.000 voor zichzelf
Jij kiest voor €200.000 voor de ander	Jij: €200.000 Tegenspeler: € 200.000	Jij: € ... Tegenspeler: € ...
Jij kiest voor €100.000 voor jezelf	Jij: € ... Tegenspeler: € ...	Jij: € ... Tegenspeler: € ...

- a** Maak de tabel af
- b** Wat zou jij kiezen? En waarom?

1.2 Basiselementen

Uit het voorbeeld van het gevangenendilemma en de opgaven van paragraaf 1.1 blijkt dat een spel uit de volgende vier elementen bestaat:

1. *De spelers* Wie is er in het spel betrokken?
2. *De regels* Wie maakt er keuzes, op welk moment worden deze gemaakt en wat zijn de mogelijkheden voor de spelers?
3. *De uitkomsten* Wat zijn voor de keuzes van de speler de uitkomstmogelijkheden?
4. *De uitbetalingen* Wat zijn bij elke uitkomst van een spel de uitbetalingen



Er worden tijdens het bepalen van de strategieën een aantal aannames gedaan met betrekking tot de spelers. Deze aannames zijn:

1. De spelers zijn rationele beslissers (*common sense*)
2. De spelers hebben een oneindig goed geheugen
3. De spelers optimaliseren hun uitbetalingen

Dat de spelers rationele beslissers zijn betekent dat de speler op een verstandige, logische en doordachte manier zijn strategie bepaalt. Dit houdt bijvoorbeeld in dat de speler een hogere waarde van zijn uitbetaling prefereert boven een lagere en rekening houdt met de strategiemogelijkheden van andere spelers. Zo weet iedere speler dat de andere spelers ook weten wat hij weet. Wanneer we een spel spelen met meerdere keuzemomenten dan onthoudt een speler dit. Dit geldt ook als een speler informatie heeft over de keuze van andere spelers.

Opgaven 1.2

- 5 Een klas heeft een proefwerk economie slecht gemaakt en de docent besluit een spel



te spelen waar de leerlingen een bonus mee kunnen verdienen. Hij besluit dat alle leerlingen de tafels uit elkaar moeten schuiven zodat de leerlingen niet bij elkaar af kunnen kijken en ze mogen ook niet overleggen met elkaar. Hij geeft iedereen een leeg briefje waar ze hun naam en een getal tussen de 0 en 100 op moeten schrijven. Hij zegt de leerlingen vóórdat ze het briefje schrijven hoe het spel werkt: van alle scores van de briefjes wordt het gemiddelde uitgerekend. Dan wordt het gemiddelde vermenigvuldigd met $\frac{2}{3}$. De

leerling die het dichtste bij deze uitkomst zit krijgt een punt bonus op het proefwerk.

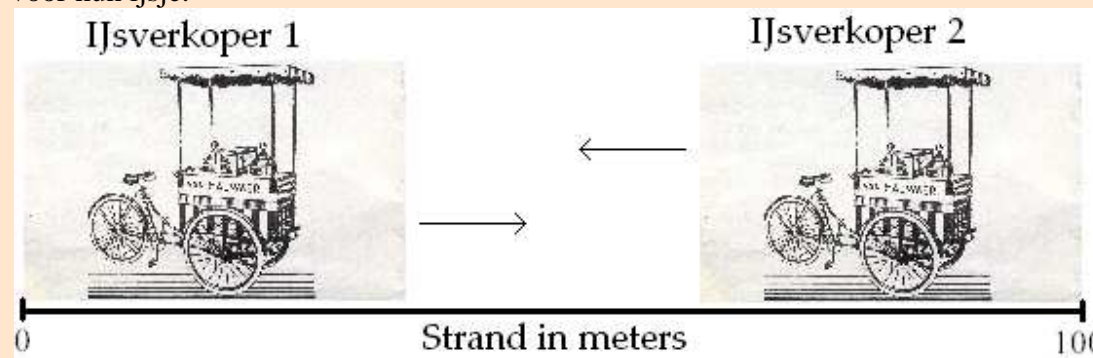
- a Geef de vier elementen (spelers, regels, uitkomsten, uitbetalingen) weer van dit spel.
- b Geef aan waar een rationele speler rekening mee houdt.
- c Welk getal zou jij als rationele speler op je briefje schrijven? Probeer het spel uit in de klas.
- 6 Beschouw de situatie zoals die is beschreven in paragraaf 1.2.
Geef de vier elementen (spelers, regels, uitkomsten, uitbetalingen) weer van dit spel.
- 7 Een docent doet een voorstel aan klas 5 vwo. Hij besluit een euromunt via een veiling te verkopen en aan degene die het hoogste biedt. Er is echter één spelregel die zegt dat degene die het *op-één-na* hoogste bod doet ook zijn bod moet betalen aan de docent. Wat zou jij bieden voor de euromunt?

2. Niet-coöperatieve speltheorie

Voorbeeld 2 *Ijsverkopers*

Probleem

Op het Scheveningerstrand ligt een strook van 100 meter waar je mag liggen. Er zijn 2 ijsverkopers, *ijsverkoper 1* en *ijsverkoper 2*, die op dit gebied hun ijs willen verkopen. Waar kunnen de ijsverkopers het beste gaan staan als ze zoveel mogelijk ijs willen verkopen, ervan uitgaande dat de mensen op het strand zo min mogelijk willen lopen voor hun ijsje.



Oplossing

Voor de strandbezoekers zou het voordelig zijn als de ijsverkoper 1 en ijsverkoper 2 hun ijs gingen verkopen op respectievelijk 25 en 75 meter omdat ze dan nooit meer dan 25 meter hoeven te lopen voor hun ijsje. Maar wanneer de ijsverkopers deze positie in zouden nemen zou ijsverkoper 1 meer ijsjes kunnen verkopen als hij een stukje opschuift naar rechts richting de tweede ijsverkoper om zo een marktaandeel van zijn concurrent te bemachtigen. Ijsverkoper 2 denkt hetzelfde en verplaatst zijn ijscokar naar links richting ijsverkoper 1. Ze zullen doorgaan met het verplaatsen richting elkaar totdat ze beide in het midden belanden.

Bij niet-coöperatieve speltheorie mogen de spelers geen bindende afspraken met elkaar maken en geen coalities vormen terwijl dat in sommige gevallen wel voordeliger zou zijn. In dit hoofdstuk behandelen we de niet-coöperatieve speltheorie.

2.1 Normale vorm

Deze **normale** vorm representatie wordt vaak voor het overzicht van het probleem weergegeven in een tabel- of matrixvorm, zie bijvoorbeeld de tabel in Voorbeeld 1 op pagina 6.

Voorbeeld 3 Bierbrouwerij



Probleem

Stel er zijn twee bierbrouwers op de markt die erover nadenken om een nieuw biersoort wel (=W) of niet (=N) op de markt te brengen, namelijk kersenbier. Bierbrouwerij II is de marktleider op dit moment en de winsten van de bierbrouwerijen zijn weergegeven in de volgende normale vorm representatie:

		Brouwerij II	
		W	N
Brouwerij I	W	(-1,5)	(8,4)
	N	(2,10)	(3,8)

In deze tabel kunnen we aflezen dat wanneer *beide* brouwers kersenbier op de markt brengen, dat de winst van Brouwerij I een waarde van -1 bedraagt en de winst van Brouwerij II dan 5 bedraagt. Dit geven we weer door de uitbetaling (-1,5). Het eerste getal slaat op Brouwerij I, het tweede getal op Brouwerij II.

Welke strategie zullen de brouwers spelen?

Oplossing

We bekijken de strategieën voor beide brouwers afzonderlijk, maar ze houden wel rekening met de strategie van de ander.

- Strategie voor Brouwerij I:
 - Stel Brouwerij II besluit wél kersenbier op de markt te brengen. Dan heeft Brouwerij I een uitbetaling van -1 als hij ook kersenbier op de markt brengt en een uitbetaling van 2 als hij geen kersenbier op de markt brengt. (z.o.z.)

- Stel Brouwerij II besluit géén kersenbier op de markt te brengen. Dan heeft Brouwerij I een uitbetaling van 8 als hij wel kersenbier op de markt brengt en een uitbetaling van 3 als hij ook geen kersenbier op de markt brengt.
- Strategie voor Brouwerij II:
 - Stel Brouwerij I besluit wél kersenbier op de markt te brengen. Dan heeft Brouwerij II een uitbetaling van 5 als hij ook kersenbier op de markt brengt en een uitbetaling van 4 als hij geen kersenbier op de markt brengt.
 - Stel Brouwerij I besluit géén kersenbier op de markt te brengen. Dan heeft Brouwerij II een uitbetaling van 10 als hij wel kersenbier op de markt brengt en een uitbetaling van 8 als hij geen kersenbier op de markt brengt.

Hieruit volgt dat het voor Brouwerij II *altijd* voordeliger is om kersenbier te brouwen want $5 > 4$ en $10 > 8$. Brouwerij I weet dit en zal daarom besluiten om geen kersenbier te brouwen.

In Voorbeeld 3 zien we dat het voor één van de twee spelers altijd voordeliger is om te kiezen voor één bepaalde strategie. Hij speelt deze strategie ongeacht de keuze van zijn tegenspeler. Om tot deze keuze te komen houdt hij wel rekening met de tegenspeler!

Definitie 2 Wanneer een bepaalde strategie voor een speler voordelig is ongeacht de keuze van zijn tegenspeler, dan zeggen we dat deze speler een *dominante strategie* heeft.

Voorbeeld 4 *Softwarebedrijf*

Probleem

Stel er zijn twee softwarebedrijven op de markt die onder andere software maken voor het vertalen van teksten. De filmindustrie is geïnteresseerd geraakt in software voor de ondertiteling van films, maar hiervoor moeten de bedrijven wel een investering doen om deze nieuwe software te ontwikkelen. De bedrijven moeten een keuze maken om wel (=W) of niet (=N) in de nieuwe software te investeren. Bedrijf I is op dit moment de marktleider (hij was eerder op de markt en zijn software is meer vertrouwd).

Voor de strategiebepaling wordt de volgende normale vorm representatie gegeven:

		Bedrijf II	
		N	W
Bedrijf I	N	(0,0)	(-10,10)
	W	(-100,0)	(20,10)

Hierin geeft de uitbetaling de winst van de bedrijven aan in miljoenen Dollars die te behalen zijn uit het project. Bedrijf II heeft een dominante strategie om wel te investeren omdat een uitbetaling van 10 groter is dan 0. Dus Bedrijf I kan verwachten dat Bedrijf II investeert en zal dan zelf beter af zijn door ook te investeren omdat $20 > -10$.

Maar als Bedrijf II nu besluit om door omstandigheden *niet* te gaan investeren (bijvoorbeeld vanwege bezuinigingen), dan kan dat hele grote gevolgen hebben voor bedrijf II dat dan 100 miljoen Dollar kan verliezen als hij wel investeert. Wat moet bedrijf I doen?

Opgaven 2.1

- 8** Beschouw de situatie zoals die is beschreven in Voorbeeld 2. Stel je voor, er zijn niet twee maar drie ijsverkopers op het stuk strand. Zullen de drie ijsverkopers dan ook met zijn drieën in het midden hun ijs verkopen? Verklaar je antwoord.
- 9** Beschouw de situatie zoals die is beschreven in Voorbeeld 3.
- a** Geef de vier elementen (spelers, regels, uitkomsten, uitbetalingen) weer van dit spel.
- b** Heeft brouwerij I ook een dominante strategie? Verklaar je antwoord.
- c** Hoe zou je de tabel in de normale vorm kunnen aanpassen zodat beide spelers een dominante strategie hebben? Zijn er meerdere mogelijkheden? Verklaar je antwoord.
- 10** Gegeven zijn de volgende normale vorm representaties van een spel met 2 spelers, die beide de keuze hebben uit strategie A en B:

1.

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(3,5)	(3,3)
	B	(6,6)	(2,4)

2.

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(4,5)	(3,3)
	B	(2,6)	(2,4)

3.

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(4,5)	(3,3)
	B	(2,0)	(2,4)

4.

		Speler II	
		A	B
Speler I	A	(1,5)	(3,2)
	B	(6,0)	(2,4)

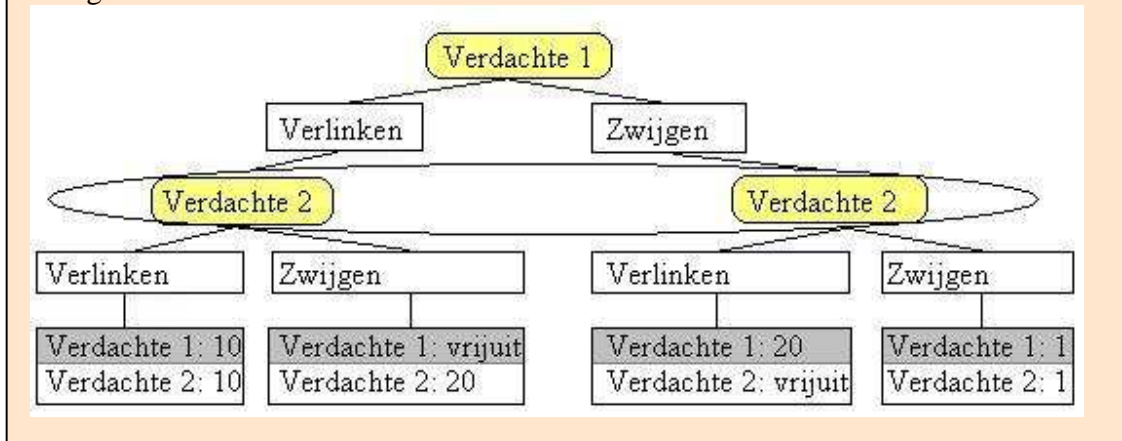
- a** Bepaal in welke van de vier gevallen speler I een dominante strategie heeft.
- b** Bepaal in welke van de vier gevallen speler II een dominante strategie heeft.

2.2 Extensieve vorm

Naast de normale vorm representatie kunnen we problemen ook in de extensieve vorm bekijken. Hierbij geven we het spel weer in een spelboom.

Voorbeeld 5 Baantjers gevangenendilemma (versie II)

We bekijken weer het gevangenendilemma uit paragraaf 1.1 op pagina 5. In plaats van in de normale vorm kunnen we het gevangenendilemma ook in de extensieve vorm weergeven:



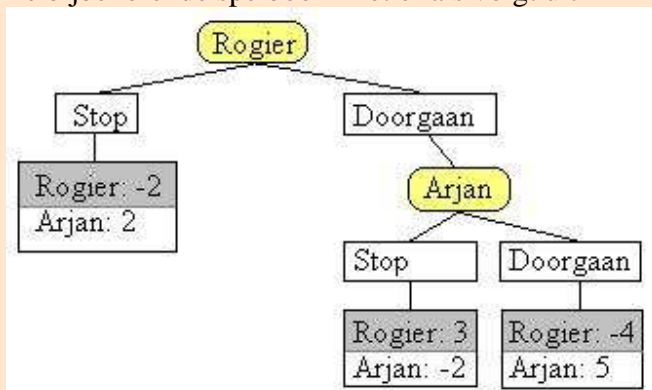
Zoals in Voorbeeld 5 begint de extensieve vorm van een spel begint met een *initieel punt*, het startpunt waar speler I (in Voorbeeld 5: Verdachte 1) zijn eerste beslissing neemt. Vanuit dit initiële punt vertrekken een aantal lijnen gelijk aan het aantal strategiemogelijkheden. We geven deze *strategielijnen* vaak de naam van de strategie (in Voorbeeld 5: Verlinken en Zwijgen). Aan het einde van deze strategielijnen komt een nieuw *beslispunt* waar speler 2 een keuze maakt uit zijn strategiemogelijkheden. Wanneer een speler, vanwege de simultane aard van het spel, niet weet in welk beslispunt hij zich bevindt worden deze beslispunten omlijnd door middel van een ovaal (in Voorbeeld 5 zijn de twee gele kaders van verdachte 2 omlijnd zijn door middel van een ovaal omdat hij niet weet of Verdachte 1 hem heeft verlinkt of dat hij heeft gezwegen). Speler twee weet dan niet de keuze van speler 1. De punten binnen het ovaal noemen we ook wel de *informatieverzameling*. In feite zijn het initiële punt en "losse" beslispunten ook informatieverzamelingen die bestaan uit één punt. Door meerdere beslispunten en/of meerdere spelers ontstaan er vertakkingen. Het spel eindigt aan het uiteinde van een vertakking. Aan dit uiteinde worden de uitbetalingen gehangen (in Voorbeeld 5 zijn dit de uitbetalingen (10,10), (0,20), (20,0) en (1,1)).

Voorbeeld 6 *Poker*

Rogier en Arjan spelen een potje poker. Ze hebben twee kaarten in hun hand en weten niet van elkaar wat ze in hun hand hebben, wel uiteraard wat ze in hun eigen hand hebben. Ze kunnen nu uit twee strategieën kiezen: ze stoppen of ze gaan door. Als je stopt dan verlies je, als je doorgaat wint degene met de hoogste kaarten. Rogier moet als eerste beslissen of hij stopt of doorgaat, daarna kiest Arjan. Bij de keuze om te stoppen maken Rogier en Arjan vanwege hun ervaringen tijdens het spel gebruik van onderstaande uitbetalingsmatrix.

		Arjan	
		Stop	Doorgaan
Rogier	Stop	(-2,2)	(-2,2)
	Doorgaan	(3,-2)	(-4,5)

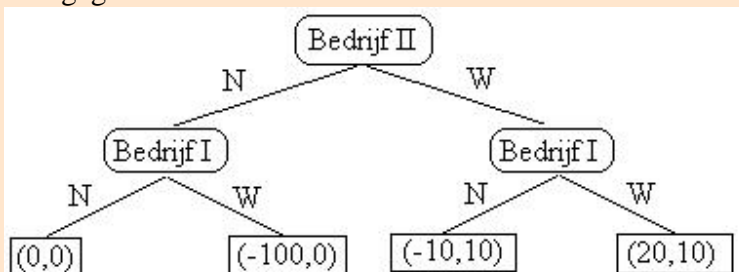
De bijbehorende spelboom ziet er als volgt uit



We merken op dat als Rogier stopt dat Arjan dan automatisch gewonnen heeft en dus niet meer hoeft te kiezen op hij stopt of doorgaat.

Voorbeeld 7 *Softwarebedrijf (Versie II)*

Beschouw de situatie zoals beschreven in Voorbeeld 4 op pagina 14. Stel nu dat Bedrijf I besluit af te wachten wat Bedrijf II doet zodat hij weet wat Bedrijf II voor keuze heeft gemaakt, dan kan dit als volgt in de extensieve vorm worden weergegeven:



Wanneer in het hele spel alle informatieverzamelingen uit maar 1 punt bestaan, betekent dit dat alle spelers weten welke strategiekeuzes de andere speler(s) hebben gemaakt, in dit geval spreken we van perfecte informatie.

Het verschil tussen Voorbeeld 7 en Voorbeeld 4 is dat er bij Voorbeeld 7 sprake is van perfecte informatie en bij Voorbeeld 4 van imperfecte informatie.

Zoals we hebben gezien valt er een onderscheid te maken tussen spelen waarin er op één moment een beslissing genomen wordt door alle spelers en spelen waarop er op verschillende momenten een beslissing wordt genomen door de spelers. We maken onderscheid tussen simultane en dynamische spelen.

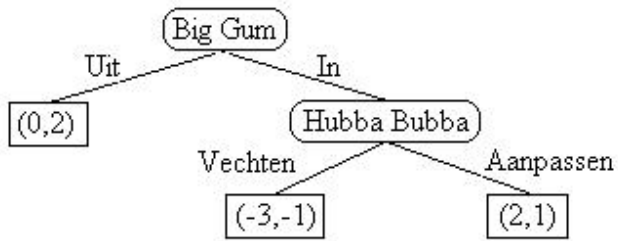
Definitie 3 Bij *simultane spelen* geldt dat alle betrokken spelers maar één keer en op hetzelfde moment hun beslissing nemen.

Definitie 4 Bij *dynamische spelen* geldt dat er meerdere momenten zijn waarop spelers een beslissing nemen.

Bij simultane spelen hebben we te maken met de situatie dat de spelers van elkaar niet weten wat de ander heeft besloten, simpelweg omdat de beslissing op hetzelfde moment plaatsvindt. Bij dynamische spelen speelt *tijd* een rol en zijn er meerdere momenten waarop beslissingen worden genomen. Er kan hierbij ook herhaling van keuzemogelijkheden optreden. Dit is bijvoorbeeld het geval bij onderhandelen waarbij speler 1 een bod uitbrengt, waarop speler 2 reageert met een tegenbod, waarop speler 1 weer een bod mag doen, enzovoort.

Opgaven 2.2

- 11 Beschouw Voorbeeld 7 op pagina 17. Stel dat Bedrijf I niet kan afwachten omdat dan alle filmproducenten hun orders bij Bedrijf II indienen (we verkeren dan weer in de situatie van versie I op pagina 14). Wat verandert er dan aan de extensieve vorm?
- 12 Stel een extensieve vorm op van het spel zoals die is beschreven in Voorbeeld 3 op pagina 12.
- 13 We beschouwen de situatie waarin Hubba Bubba de monopolist is op de markt van kauwgom. Big Gum heeft de intentie om wel (=In) dan niet (=Uit) tot de kauwgommarkt toe te treden om er zo een duopolie van te maken. Hubba Bubba heeft de mogelijkheid om agressief op te treden tegen Big Gum op de markt (=Vechten) of om zich aan te passen aan de nieuwkomer Big Gum (=Aanpassen). Gegeven is de volgende extensieve vorm representatie:



- a Geef de normale vorm representatie.
 - b Heeft één van beide spelers een dominante strategie?
 - c Wat is het verschil voor Hubba Bubba voor het bepalen van een strategie tussen de normale vorm en de extensieve vorm?
- 14** Geef een schets van de extensieve vorm van het spel Boter-Kaas-En-Eieren. Hoeveel eindpunten heeft dit spel?

2.3 Nash-evenwicht

Zowel bij simultane en dynamische spelen zijn we op zoek naar een *evenwicht* van het spel. Bij het bepalen van een strategie wordt er geanticipeerd op alle mogelijke keuzes. Niet alleen bekijk je wat je het beste kunt doen op een bepaald moment, maar je bekijkt ook de mogelijkheden in het geval een tegenspeler een keuze heeft gemaakt. Zo denk je bij schaken niet alleen na over de beste zet in de beurt dat je aan zet bent, maar je denkt ook na over de mogelijke antwoorden op een zet van de tegenstander.

Definitie 5 Van een *evenwicht* van een spel is sprake als de spelers zich niet kunnen verbeteren door individueel een andere keuze te maken.

In een evenwicht spelen de spelers dus het *beste-antwoord* tegenover de strategie van de ander. Het meest bekende evenwicht is het *Nash-evenwicht*.

Definitie 6 In een *Nash evenwicht* :

- speel ik het beste wat ik kan, gegeven wat mijn tegenspeler doet
- speelt mijn tegenspeler het beste wat hij kan, gegeven wat ik doe

Dit komt erop neer dat wanneer je in een Nash-evenwicht zit *geen van beide spelers de neiging heeft om van zijn keuze af te wijken*. Ook dit principe zijn we al eerder tegengekomen. Denk maar aan de ijsverkopers in de inleiding van dit hoofdstuk. Het Nash-evenwicht is (50,50) omdat beide in het midden van het strand van 100 meter breed gaan zitten. Geen van beide spelers wil hiervan afwijken omdat de ander dan een marktaandeel inpikt. Mijn tegenspeler zal ook niet afwijken omdat hij weet dat ik dan zijn marktaandeel inpikt. In een spel hoeft niet altijd een Nash-evenwicht aanwezig te zijn, het kan ook zelfs zo zijn dat er meerdere Nash-evenwichten zijn.

Voorbeeld 8 *Schaatswedstrijd of concert?*

Twee vriendinnen besluiten dat ze op een dag zin hebben om ergens heen te gaan. Ze kunnen kiezen tussen een schaatswedstrijd of een concert. Dit probleem wordt in onderstaande tabel in normale vorm weergegeven.

		Iris	
		Schaatswedstrijd	Concert
Nina	Schaatswedstrijd	(10,10)	(0,0)
	Concert	(0,0)	(20,20)

Duidelijk is dat de vriendinnen een gezellige dag willen hebben en daarom samen iets willen ondernemen. Als de één naar de schaatswedstrijd gaat en de ander naar het concert beleven ze hier geen plezier aan. Er zijn in dit geval twee Nash-evenwichten, namelijk (schaatswedstrijd, schaatswedstrijd) en (concert, concert). Als beide kiezen om naar de schaatswedstrijd te gaan heeft *geen van beide de neiging om van deze keuze af te wijken* om toch naar het concert te gaan. Datzelfde geldt voor het concert.

Er valt nog een opmerking te maken bij het bovenstaande voorbeeld, want wat heeft de waarde van 10 of de waarde van 20 voor betekenis? De mate waarin je tevreden bent met een keuze is soms moeilijk uit te drukken in een waarde. Wat je soms wel weet welke keuze je prefereert. In bovenstaand voorbeeld geven de waarden 10 en 20 alleen aan dat Rogier en Arjan de bioscoop prefereren boven de voetbalwedstrijd. Er wordt ook wel gezegd dat de bioscoop meer *nut* oplevert dan de voetbalwedstrijd.

We kunnen verder nog opmerken dat een dominante strategie een speciaal geval is van een Nash-evenwicht.

Begrippenlijst

Dominante strategie	Wanneer een bepaalde strategie voor een speler voordelig is ongeacht de keuze van zijn tegenspeler, dan zeggen we dat deze speler een <i>dominante strategie</i> heeft.
Dynamische spelen	Bij <i>dynamische spelen</i> geldt dat er meerdere momenten zijn waarop spelers een beslissing nemen.
Evenwicht	Een <i>evenwicht</i> van een spel wil zeggen dat de spelers in dit punt optimaal tegen elkaar spelen.
Extensieve vorm	Een spel in de <i>extensieve vorm representatie</i> wordt weergegeven in een spelboom.
Nash-evenwicht	In een <i>Nash evenwicht</i> : <ul style="list-style-type: none">• speel ik het beste wat ik kan, gegeven wat mijn tegenspeler doet• speelt mijn tegenspeler het beste wat hij kan, gegeven wat ik doe
Normale vorm	Een spel in de <i>normale vorm representatie</i> wordt in het algemeen weergegeven in een tabel of matrixvorm.
Perfekte informatie	Een spel bevat <i>perfecte informatie</i> als elke informatieverzameling uit maar één punt bestaat. In alle andere gevallen is er sprake van <i>imperfecte informatie</i> .
Simultane spelen	Bij <i>simultane spelen</i> geldt dat alle betrokken spelers maar één keer en op hetzelfde moment hun beslissing nemen.
Speltheorie	<i>Speltheorie</i> houdt zich bezig met wiskundige modellen van situaties van conflict en samenwerking uit de reële wereld tussen tenminste twee rationele en intelligente spelers.
Strategiekeuze	De keuze die een speler maakt uit zijn strategiemogelijkheden noemen we de <i>strategiekeuze</i>
Uitbetaling	De waarde die een speler hecht aan de uitkomst wordt de <i>uitbetaling</i> genoemd.